

BACALAUREAT

Matematică M_Mate-Info

- 24 de teme recapitulative cu breviar teoretic
- 1212 itemi de antrenament
- 10 teste cu rezolvări detaliate
- 60 de teste pregătitoare

A. TEME RECAPITULATIVE

CAPITOLUL 1. ALGEBRĂ, GEOMETRIE, TRIGONOMETRIE. CLASELE IX-X	3
1.1. Mulțimi de numere. Elemente de logică matematică	3
1.2. Șiruri. Progresii	9
1.3. Funcții. Funcția de gradul I	12
1.4. Funcția de gradul al II-lea	17
1.5. Numere reale. Radicali. Logaritmi	24
1.6. Mulțimea numerelor complexe	29
1.7. Funcții (putere, radical, exponențială, logaritmică)	36
1.8. Ecuații (iraționale, exponențiale, logaritmice)	41
1.9. Combinatorică. Matematici financiare	49
1.10. Vectori	58
1.11. Elemente de geometrie analitică	67
1.12. Elemente de trigonometrie	71
1.13. Aplicații ale trigonometriei în geometrie	75
 CAPITOLUL 2. ALGEBRĂ. CLASELE XI-XII	 80
2.1. Matrice. Determinanți	80
2.2. Sisteme de ecuații liniare	88
2.3. Structuri algebrice	92
2.4. Polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ. Ecuații algebrice	100
 CAPITOLUL 3. ANALIZĂ MATEMATICĂ. CLASELE XI-XII	 107
3.1. Limite de funcții. Asimptote	107
3.2. Funcții continue	115
3.3. Funcții derivabile	121
3.4. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor	132
3.5. Primitive	137
3.6. Integrale definite	144
3.7. Aplicații ale integralei definite	148

B. TESTE

CAPITOLUL 4 . 10 TESTE CU REZOLVARE DETALIATĂ	151
CAPITOLUL 5. 60 DE TESTE PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT	161

SOLUȚII**A. TEME RECAPITULATIVE**

CAPITOLUL 1. ALGEBRĂ, GEOMETRIE, TRIGONOMETRIE. CLASELE IX-X	221
1.1. Mulțimi de numere. Elemente de logică matematică	221

1.2. Șiruri. Progresii	225
1.3. Funcții. Funcția de gradul I	227
1.4. Funcția de gradul al II-lea	228
1.5. Numere reale. Radicali. Logaritmi	230
1.6. Mulțimea numerelor complexe	234
1.7. Funcții (putere, radical, exponențială, logaritmică).....	237
1.8. Ecuații (iraționale, exponențiale, logaritmice)	238
1.9. Combinatorică. Matematici financiare	243
1.10. Vectori	246
1.11. Elemente de geometrie analitică.....	248
1.12. Elemente de trigonometrie	250
1.13. Aplicații ale trigonometriei în geometrie	255
CAPITOLUL 2. ALGEBRĂ. CLASELE XI-XII.....	258
2.1. Matrice. Determinanți	258
2.2. Sisteme de ecuații liniare.....	262
2.3. Structuri algebrice	264
2.4. Polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ. Ecuații algebrice.....	269
CAPITOLUL 3. ANALIZĂ MATEMATICĂ. CLASELE XI-XII.....	274
3.1. Limite de funcții. Asimptote.....	274
3.2. Funcții continue.....	279
3.3. Funcții derivabile.....	283
3.4. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor	292
3.5. Primitive	302
3.6. Integrale definite.....	306
3.7. Aplicații ale integralei definite	310
B. TESTE	
CAPITOLUL 4. 10 TESTE CU REZOLVARE DETALIATĂ.....	311
CAPITOLUL 5. 60 DE TESTE PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT.....	327

Capitolul 1

Algebră, geometrie, trigonometrie. Clasele IX-X

1.1. Mulțimi de numere. Elemente de logică matematică

- **Mulțimi finite. Reguli de numărare**

O mulțime este *finită* dacă are n elemente, $n \in \mathbb{N}$.

O mulțime este *infinită* dacă nu este finită.

O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numește *mărginită* dacă $\exists m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \leq x \leq M$, $\forall x \in A$.

Regula sumei: Dacă un anumit obiect A poate fi ales în m moduri, iar un alt obiect B poate fi ales în n moduri, atunci alegerea „lui A sau B ” poate fi realizată în $(m + n)$ moduri.

Regula produsului: Dacă un obiect A se poate alege în m moduri și dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în n moduri, atunci alegerea perechii (A, B) în această ordine, poate fi realizată în $m \cdot n$ moduri.

- **Modulul unui număr real:** $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

a) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R};$

b) $|-x| = |x|, \forall x \in \mathbb{R};$

c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R};$

d) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*;$

e) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R};$

f) $|x| = a, a > 0 \Leftrightarrow x = \pm a;$

g) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a], a > 0;$

h) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ sau } x \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty), a > 0.$

- **Partea întregă și partea fracționară**

Se numește *partea întregă* a numărului real x , notată $[x]$, cel mai mare întreg mai mic sau egal cu x . Deci $[x] \in \mathbb{Z}$ și $[x] \leq x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Se numește *partea fracționară* a numărului real x , notată cu $\{x\}$, diferența dintre x și partea lui întregă. Deci $\{x\} \in [0, 1)$ și $\{x\} = x - [x], \forall x \in \mathbb{R}$.

Proprietăți:

- a) $x \in [k, k + 1); k \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = k;$
- b) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \{x\} = 0;$
- c) $[x + n] = [x] + n, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z};$
- d) $\{x + n\} = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z};$
- e) $x - 1 < [x] \leq x, \forall x \in \mathbb{R}.$

• **Inegalități remarcabile** (pentru două numere reale)

a) Inegalitatea mediilor: $\forall a, b > 0$ avem:

$$\min(a, b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \max(a, b);$$

b) Inegalitatea Cauchy–Buniakovski–Schwartz:

$$a, b, x, y \in \mathbb{R}, (ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2);$$

c) Inegalitatea lui Bernoulli: $\alpha > 0, r > -1, r \in \mathbb{Q}, (1 + \alpha)^r > 1 + r\alpha.$

• **Principiul inducției matematice**

Propoziția $p(n)$ este adevărată pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ dacă sunt verificate condițiile:

1. Propoziția $p(n)$ este adevărată pentru $n = 0;$
2. Din presupunerea că $p(n)$ este adevărată pentru $n = k, k \in \mathbb{N}$ rezultă că este adevărată pentru $n = k + 1.$

Etapele inducției matematice:

- I. *Verificarea propoziției:* pentru $n = 0$ verificăm dacă $p(0)$ este adevărată;
- II. *Demonstrația:* $p(k) \rightarrow p(k + 1).$ Presupunem că $p(k)$ este adevărată și demonstrăm că $p(k + 1)$ este de asemenea adevărată. Dacă cele două etape sunt validate, atunci are loc

Concluzia: Propoziția $p(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}.$

Formule care pot fi demonstrate prin inducție matematică:

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}^*;$
- b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}^*;$
- c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2, n \in \mathbb{N}^*.$

• **Formule de calcul prescurtat**

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab;$	$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab;$
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$	
$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc;$	
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$

• **Sume remarcabile**

$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$	$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2;$
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$	$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3};$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}; \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

PROBLEME PROPUSE

1. Demonstrați identitatea lui Hermite pentru $n = 3$. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, avem $[x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \left[x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx]$.

2. Demonstrați că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$ avem:

a) $a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc = \frac{1}{2} [(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2]$;

b) $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)$;

c) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2} (a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$;

d) $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$, pentru $a > 0, b > 0, c > 0$.

3. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:

a) $a + b + c = 0 \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$;

b) $a + b + c = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$.

4. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $a + b + c = 0$.

a) Demonstrați că $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$.

b) Calculați $\sum_{k=1}^{99} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$.

5. a) Determinați suma $S_{n+1} = \frac{1^2}{1^4+1} + \frac{2^2-1}{2^4+2} + \dots + \frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^4+n+1}$.

b) Determinați n , dacă $\frac{10}{11} < S_n < \frac{110}{111}$.

6. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:

a) $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$, $\min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$;

b) $|a+b| + |a-b| \leq 2\sqrt{a^2+b^2}$.

7. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ și $a, b, c \in \{-1, 0, 1\}$. Demonstrați că $|ax + by + cz| \leq |x| + |y| + |z|$.

8. Fie $x = \sqrt{7} - \sqrt{2}$, $y = \sqrt{7} + \sqrt{2}$. Demonstrați că $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \in \left(\frac{4}{5}, \frac{6}{5} \right)$.

9. Fie $a = \sqrt{4 - \sqrt{7}}$, $b = \sqrt{4 + \sqrt{7}}$. Calculați $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$.

10. Fie $x = \sqrt{99 - 70\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{99 + 70\sqrt{2}}$.

a) Calculați mediile aritmetică și geometrică ale celor două numere (în câte două moduri fiecare).

b) Calculați $\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4}$.

11. Fie $a, b, c > 0$, $x, y, z > 0$. Demonstrați că:

a) $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$; b) $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

12. Fie $a, b, c > 0$. Demonstrați că:

a) $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$; b) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a+b+c$.

13. Fie $a, b, c > 0$. Demonstrați că:

a) $\frac{a^2}{b^2c^2} + \frac{b^2}{a^2c^2} + \frac{c^2}{a^2b^2} \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$; b) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$.

14. Determinați $a \geq 4$, $b \geq 9$ dacă $a + b \leq 4\sqrt{a-4} + 6\sqrt{b-9}$.

15. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ dacă $\sqrt{a^2 - 2a + 2} + \sqrt{4b^2 - 12b + 13} \leq 3$.

16. Fie $a, b, c \in [1, 3]$. Demonstrați că $A = a + b + c + 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq 12$.

17. Fie $a > 0$, $b > 0$, cu $a + b = 1$. Demonstrați că $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

18. a) Demonstrați că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $[x] = [y]$, atunci $|x - y| < 1$.

b) „Reciproca” este adevărată?

19. Demonstrați că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, avem $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

20. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, calculați partea întreagă a numerelor:

a) $\sqrt{n^2 + 2n}$; b) $\sqrt{n^2 + 4n}$; c) $\sqrt{4n^2 + n}$;
 d) $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})^2$; e) $(\sqrt{n} + \sqrt{n+10})^2$; f) $(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})^2$.

21. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, determinați sumele:

a) $[\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + \dots + [\sqrt{n^2 + n}]$; b) $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \dots + [\sqrt{n^2 - 1}]$.

22. Fie $a, b \in I = [2, 4]$. Demonstrați că $a^2 - 3a - 3b + 12 \in I$.

23. Demonstrați că dacă $x, y \in I = [3, \infty)$, atunci $xy - 3x - 3y + 12 \in I$.

24. Demonstrați prin inducție matematică, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

b) $\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{n}{4n+3}$;

c) $2^n > 2n + 1, n \geq 3$;

d) $n! > 2^n, \forall n \geq 4$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

25. Calculați următoarele sume:

a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$; b) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 100}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{21+2\sqrt{110}}}$.

26. Demonstrați că $7^n + 17 = M_6, \forall n \in \mathbb{N}$.

27. Determinați numerele întregi x, y , știind că $x^6 + 5x^3 = y^8 + 103$.

28. Rezolvați ecuația $\left\lfloor \frac{3x+1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6x+3}{10} \right\rfloor = 1$.

29. Determinați $m \in \mathbb{R}$ dacă ecuația $|2x+4| - |x-1| = m$ are soluție unică.

30. Fie $n \geq 2$. Determinați $\left\{ n + \sqrt{n^2 - 1} \right\} + \left\{ \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}} \right\}$.

31. Demonstrați că:

a) $\left\{ \sqrt{\frac{21}{2}} \right\} < \frac{1}{2}$;

b) $\left[\sqrt{\pi^2 + n} \right] = 3$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

32. Fie a, b, c trei zecimale consecutive ale lui $\frac{4}{37}$. Determinați $a^2 + b^2 + c^2$.

33. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$.

34. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, cu $a+b+c \neq 0$, și $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, determinați:
 $(a+b)(b+c)(c+a)$.

35. Determinați $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, cu $a < b < c < d$ astfel încât $a! \cdot b! \cdot c! \cdot d! = 10!$.

36. Fie $a \in \mathbb{R}$. Determinați $I \cap J$, dacă $I = (1, a^2], J = (0, 4]$.

37. Determinați mulțimea $\left\{ a \in \mathbb{R} \left| \frac{2a+1}{a^2+2a+3} \in \mathbb{Z} \right. \right\}$.

38. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a+b=4$. Demonstrați că $a^4 + b^4 \geq 32$.

39. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, dacă $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \geq 0,99$.

40. Demonstrați că există o infinitate de pătrate perfecte (de numere naturale) având suma de forma $2^m + 2^n + 2^{2p}$, cu $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.

41. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, știind că $A(n) = k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, unde $A(n) = 1! + 3! + 5! + \dots + (2n-1)!$.

42. Determinați $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dacă $x^2 + y^2 = x + y + xy$.

43. Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2 - [x] = 12$; b) $\left[\frac{2x+1}{3} \right] = \{x\}$; c) $\left[\frac{nx+1}{n+1} \right] = \{x\}$, $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$.

44. Rezolvați ecuațiile:

a) $\left[\frac{x-3}{3} \right] = \frac{x+1}{4}$; b) $\left[\frac{2x+1}{3} \right] = \frac{2x-1}{2}$; c) $\left[x - \frac{1}{6} \right] + \left[x + \frac{1}{3} \right] = 3x - 2$.

45. Rezolvați ecuațiile:

a) $\left[\frac{2x-1}{2} \right] + \left[\frac{6x-1}{6} \right] + \left[\frac{6x+1}{6} \right] = 3$; b) $\left[x - \frac{1}{3} \right] + [x] + \left[x + \frac{1}{3} \right] = [2x+1]$.

46. Rezolvați ecuațiile:

a) $[|x|] = |[x]|$; b) $\left[\frac{2x^2}{x^2+1} \right] = x$; c) $[3\sqrt{x}] = x$.

47. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

a) $9 \mid 4^n + 15n - 1$; b) $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$; c) $210 \mid 7^{4n+1} - 7$.

48. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

b) $(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)$, pentru orice $a > 0, b > 0$.

49. Demonstrați că, dacă $n \in \mathbb{N}$, avem:

a) $2^n \geq n^2, n \geq 5$; b) $2^n > n^3, n > 10$; c) $3^{n+1} \geq n^4 + n^2 + 1, n \geq 5$.

50. Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, avem:

a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ (Catalan);

b) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

1.2. Șiruri. Progresii

- Șirul (a_n) este mărginit dacă există $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a \leq a_n \leq b$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- Șirul (a_n) este mărginit dacă există $M > 0$, astfel încât $|a_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numește:
 - strict crescător dacă $a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
 - strict descrescător dacă $a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
 - crescător dacă $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
 - descrescător dacă $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
 - monoton (strict) dacă este crescător (strict) sau descrescător (strict).
- Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ se numește *progresie aritmetică* dacă $a_1 \in \mathbb{R}$ și $a_{n+1} = a_n + r, \forall n \geq 1$, $r \in \mathbb{R}$, unde r se numește rația progresiei aritmetice.

Proprietăți:

- Formula termenului general este $a_n = a_1 + (n - 1)r, \forall n \geq 1$;
 - $(a_n)_{n \geq 1}$ progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$;
 - a_1, a_2, \dots, a_n sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_k + a_{n-k+1}, \forall k = 1, n$;
 - $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \forall n \geq 1$.
- Șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ se numește *progresie geometrică* dacă $b_1 \in \mathbb{R}^*$ și $b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall n \geq 1$; $q \neq 0$ se numește rația progresiei geometrice.

Proprietăți:

- Formula termenului general este $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \geq 1$;
- $(b_n)_{n \geq 1}$ e progresie geometrică $\Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \forall n \geq 1$;
- b_1, b_2, \dots, b_n sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \dots = b_k \cdot b_{n-k+1}, \forall k = 1, n$;
- $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \begin{cases} b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ nb_1, & q = 1 \end{cases}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieți următorii trei termeni ai șirurilor:

a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$;

b) $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{12}, \sqrt{20}, \dots$

2. Scrieți primii patru termeni ai șirurilor definite prin:

a) $a_n = 2n + 1$;

b) $a_n = n^2 - n + 1$;

c) $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n+1}$;

d) $a_n = \frac{2n-1}{3n+1}$.

3. Demonstrați că următoarele șiruri sunt mărginite ($n \geq 1$):

a) $a_n = \frac{2}{n+1}$;

b) $a_n = \frac{n+2}{n+4}$;

c) $a_n = \frac{n+5}{n+2}$;

d) $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}$;

e) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$;

f) $a_n = \sqrt{\frac{4n^2-1}{n^2+1}}$.

4. Studiați monotonia șirurilor cu termenul general:

a) $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$;

b) $a_n = n^2 + 2n$;

c) $a_n = n^2 - 5n + 4$;

d) $a_n = \frac{3n-1}{3n+2}$;

e) $a_n = 2 + (-1)^n$;

f) $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2+n}$.

5. Studiați monotonia șirurilor cu termenul general:

a) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$;

b) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$;

c) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$;

d) $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+n}$.

6. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$. Determinați a_1 și r în cazurile:

a) $\begin{cases} a_1 + a_7 = 36 \\ a_4 + a_5 = 41 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} a_9 + a_{11} = -184 \\ a_5 + a_7 + a_9 = -189 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} a_1 + a_5 = 0 \\ a_2^5 + a_3^2 = 16 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} a_2 + a_4 = a_6 - 7 \\ a_8 - a_7 = 2a_4 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} S_{10} = 8S_5 \\ S_3 = -3 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} a_{20} = 39 \\ a_{40} = 79 \end{cases}$.

7. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$. Determinați a_1 și S_{10} , dacă $r = -2$, $a_n = -4$, $S_n = 50$.

8. Determinați suma primilor n termeni ai șirului $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots$.

9. Într-o progresie aritmetică cu număr impar de termeni, suma termenilor de rang par este 55, suma termenilor de rang impar este 66, iar produsul termenilor extremi este 21. Determinați ultimul termen al progresiei.

10. Suma primilor n termeni ai unui șir $(a_n)_{n \geq 1}$ este S_n . precizați dacă avem o progresie aritmetică în cazurile:

a) $a_n = 5n - 1$;

b) $S_n = 2n^2 + 3n$;

c) $S_n = n^2 - n + 7$.

11. Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_n = \alpha n + \beta$.

12. Determinați S_{13} pentru progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} = 40$.

13. Într-o progresie aritmetică se știe că $S_{10} = 100$, $S_{30} = 900$. Determinați S_{50} .

14. Determinați suma tuturor numerelor naturale de trei cifre care împărțite la 68 dau restul 5.

15. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$. Determinați b_{10} , b_{25} și S_n dacă:

a) $b_1 = 3$, $b_4 = 24$;

b) $b_5 = 5$, $b_6 = 80$;

c) $b_5 = \frac{1}{2}$, $b_8 = -\frac{1}{2}$.

16. Pentru progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$, determinați b_1 și q dacă:

a) $b_1 + b_2 = 5$, $b_2 + b_4 = 20$;

b) $b_2 - b_1 = 6$, $b_4 - b_3 = 54$;

c) $b_1 + b_2 = 8$, $b_1 + b_2 + b_3 = 26$;

d) $b_2 + b_4 = \frac{5}{16}$, $b_1 + b_2 + b_3 = \frac{7}{8}$;

e) $b_1 - b_2 + b_3 = a$, $b_2 - b_3 + b_4 = 2a$, $a \in \mathbb{R}^*$;

f) $b_1 + b_2 + b_3 = a$, $b_2 + b_3 + b_4 = 4a$, $a \in \mathbb{R}^*$.

17. Stabiliți dacă șirul cu termenul general următor este progresie geometrică:

a) $b_n = 2^{n+2}$;

b) $b_n = 3^{-n+3}$;

c) $b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$;

d) $b_n = 2^n - 1$;

e) $b_n = 2^n + 3^n$;

f) $b_n = n^2 + n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

18. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Determinați $x \in \mathbb{R}$ dacă avem $\div a + x, b + x, c + x$.

19. Determinați $x \in \mathbb{R}$ dacă avem $\div 1, x, y$ și $\div 1, x, y + 9$.

20. Fie $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ și $\div (b_n)_{n \geq 1}$. Demonstrați că $S_n \cdot (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

21. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ dacă avem $\div a, b, 9$ și $\div a, b, 12$.

22. Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ dacă avem $abc = 512$, $\div a, b, c$ și $\div a - 1, b - 1, c - 5$.

23. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$. Determinați S_9 , dacă $S_3 = 4$, $S_6 = 6$.

24. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $P_n = b_1 b_2 \dots b_n$. Știind că $P_4 = P_5$, calculați P_9 .

25. Fie $\div a, b, c, d$. demonstrați că $a^2 + d^2 \geq b^2 + c^2$.

26. Determinați progresiile geometrice (a_n) și (b_n) dacă $a_1 = b_1$, $a_2 = b_1 + b_2$, $a_2 + a_3 = b_3 + b_4$, $a_n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

27. Calculați numărul $a = 4 + 44 + 444 + \dots + \underbrace{44\dots4}_{100}$.

28. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$, $a_{n+1} - 2a_n = 1$, $\forall n \geq 1$. Demonstrați că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ definit prin $b_n = 1 + a_n$ este progresie geometrică.

29. Determinați numărul termenilor supraunitari din progresia geometrică (b_n) , dacă $b_n = 2026$ și rația este $q = \frac{1}{2}$.

30. Calculați suma primilor 30 de termeni ai unei progresii aritmetice, dacă $S_{10} = S_{20}$.

31. Demonstrați că dacă $\frac{1}{16}$, 2 și 16 sunt termeni ai unei progresii geometrice, atunci și 8 este termen al progresiei geometrice.

32. Demonstrați că dacă 43, 31 și 15 sunt termeni ai unei progresii aritmetice, atunci și 3 este termen al progresiei aritmetice.

33. Determinați al cincilea termen al unei progresii geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă $4b_2 + b_1 = 16b_3 - b_1 = 3$.

34. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^4 + n^2}$. Determinați a_{100} .

35. Fie șirul $(a_n)_{n > 1} \subset \mathbb{N}$. Demonstrați că șirul are termenul general $b_n = a_{a_n}$ este progresie geometrică.

36. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_1 = 1$ și rația $r = 17$. Determinați cel mai mic termen a_n , $n \geq 2$, care este pătrat perfect.

37. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $b_1 = 2048$ și rația $q = \frac{1}{2}$. Determinați termenii progresiei care sunt pătrate perfecte.

38. Determinați termenul general al șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin:

a) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n - 2, \forall n \geq 1;$ b) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2 + n}.$

39. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$. Demonstrați că $b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n = (\sqrt{b_1 b_n})^n$.

40. Demonstrați că numerele $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{n}$ nu pot fi termeni ai unei progresii:

- a) aritmetice; b) geometrice.

1.3. Funcții. Funcția de gradul I

• Fie $A, B \neq \emptyset, f: A \rightarrow B$ se numește *funcție* definită pe A cu valori în B , dacă oricărui x din A i se asociază un unic element y din B .

A se numește *domeniu de definiție*, B se numește *codomeniu*, iar f se numește *lege de corespondență*.

• Graficul unei funcții este mulțimea: $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.

• **Proprietăți:**

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *funcție pară* dacă $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R};$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *funcție impară*; $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R};$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *funcție periodică* dacă există $T > 0$, astfel încât $f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R};$